

УДК 517.958

ФАКТОРИЗАЦИЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ¹⁾**Т.А. СУШКЕВИЧ, В.А. ФАЛАЛЕЕВА***Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва**E-mail: tamaras@keldysh.ru***FACTORIZATION OF THE VECTORIAL PROBLEM BY A METHOD
OF THE INFLUENCE FUNCTIONS****T.A. SUSHKEVICH, V.A. FALALEEVA***Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow***Аннотация**

Цель работы — обратить внимание на класс векторных задач поляриметрии, которая активно развивается в разных приложениях, в том числе для исследования климата и аэрокосмического дистанционного зондирования Земли. Задачи поляриметрии относятся к матричным и для их решения разрабатываются тензорные методы. В случае гетерогенных сред имеем дело с тремя вложенными матричными операциями. Предлагается оригинальный "гибридный" подход для численного решения задачи переноса электромагнитного излучения в гетерогенной среде с разными оптическими характеристиками и радиационными режимами, основанный на методе функций влияния векторных краевых задач для кинетических уравнений Больцмана. Для численной реализации такой "гибридной" модели используется комбинация сеточного метода характеристик и метода Монте-Карло.

Ключевые слова: Математическая модель, теория переноса излучения, векторная краевая задача, гибридный метод, метод функций влияния, метод Монте-Карло.

Summary

The purpose of the work is to pay attention to the class of vector problems polarimetry, which is actively developing in various applications, including studies of the Earth's climate and aerospace remote sensing of Earth. The polarimetry problems refer to matrix and tensor methods are developed for their decision. In the case of heterogeneous media are dealing with three enclosed matrix operations. We propose the original "hybrid" approach for numerical solution of the problem of electromagnetic radiation transfer in a heterogeneous media with different optical properties and radiation models, based on the method of the influence functions of the vector boundary value problems for Boltzmann kinetic equations. For the numerical realization of such a "hybrid" model uses a combination of the grid method of characteristics and the method of Monte Carlo.

Key words: Mathematical model, the theory of the radiation transfer, a vector boundary value problem, "hybrid" approach, method of the influence functions, method of Monte Carlo.

Введение

Цель работы — обратить внимание на класс векторных задач поляриметрии, которая активно развивается в разных приложениях, в том числе для исследования климата Земли и космических исследований. Характеристики поляризации излучения Земли являются наиболее информативным индикатором состояния и загрязнения атмосферы: степень поляризации в условиях чистой молекулярной атмосферы порядка 70–80%, а при аэрозольных загрязнениях снижается до 2–12%! США, Япония, ЕС запускают спутники дистанционного зондирования Земли с поляриметрической аппаратурой. Важные задачи связаны с

¹⁾Работа поддержана РФФИ (проекты 14-31-50047-мол-нр, 12-01-00009, 14-01-00197)

проблемами "поляризационного контраста" во всевозможных приложениях разного назначения. Задачи поляриметрии относятся к матричным и для их решения разрабатываются тензорные методы, причем в случае гетерогенных сред имеем дело с тремя вложенными матричными операциями. Предлагается оригинальный "гибридный" подход с факторизацией решения задачи переноса электромагнитного излучения в гетерогенной среде с разными оптическими характеристиками и радиационными режимами в отдельных подобластях, основанный на методе функций влияния векторных краевых задач для кинетических уравнений Больцмана [1]. Для численной реализации такой "гибридной" модели используется комбинация сеточного конечно-разностного метода и метода Монте-Карло [2].

1. Векторная краевая задача теории переноса поляризованного излучения

Для большей наглядности, чтобы изложить суть подхода и не усложнять изложение, рассмотрим перенос излучения с учетом поляризации в плоско-стратифицированной системе, содержащей слои с изотропными и анизотропными средами.

В SP -представлении (Стокса-Пуанкаре) компоненты вектора-столбца $\Phi = (I, Q, U, V)^T$ имеют нормировку интенсивности излучения I [1]:

$$Q = Ip \cos 2\chi \cos 2\beta, \quad U = Ip \sin 2\chi \cos 2\beta, \quad V = Ip \sin 2\beta,$$

χ — азимут плоскости поляризации, β — степень эллиптичности, $0 \leq p \leq 1$ — степень поляризации, и обладают следующими важными свойствами:

$$I \geq 0, \quad I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2, \quad |Q| + |U| + |V| \leq \sqrt{3}I;$$

в функциональном пространстве $L(x)$, $x \in X$, X — фазовое пространство,

$$\|\Phi\|_{L^{(4)}} = \sum_{m=1}^M \|\Phi_m\|_L \leq (1 + \sqrt{3})\|I\|_L, \quad \|I\|_L = \int_X |I(x)| dx = \int_X I(x) dx.$$

Вектор Стокса находим как решение общей векторной краевой задачи теории переноса

$$\hat{K}\Phi = \mathbf{F}, \quad \Phi \Big|_t = \mathbf{F}^0, \quad \Phi \Big|_b = \varepsilon \hat{R}\Phi + \mathbf{F}^H \quad (1)$$

с линейными операторами: оператор переноса

$$\hat{D} \equiv (s, grad) + \sigma(z) = \hat{D}_z = \mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma(z); \quad \hat{K} \equiv \hat{D} - \hat{S},$$

где интеграл столкновений (функция источника)

$$\hat{S}\Phi \equiv \sigma_s(z) \int_{\Omega} \hat{P}(z, s, s') \Phi(z, s') ds', \quad ds' = d\mu' d\varphi';$$

равномерно ограниченный оператор отражения

$$[\hat{R}\Phi](H, s) \equiv \int_{\Omega^+} \hat{q}(s, s^+) \Phi(H, s^+) ds^+. \quad (2)$$

Краевая задача (1)–(2) линейная по источникам и ее решение можно искать в виде суперпозиции

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_R.$$

Фоновое излучение Φ_0 определяется как решение первой векторной краевой задачи теории переноса с "вакуумными" условиями для слоя с прозрачными или абсолютно черными (неотражающими) границами ($\hat{R} \equiv 0$):

$$\hat{K}\Phi_0 = \mathbf{F}, \quad \Phi_0 \Big|_t = \mathbf{F}^0, \quad \Phi_0 \Big|_b = \mathbf{F}^H. \quad (3)$$

Задача для подсветки Φ_R , обусловленной влиянием отражающей подстилающей поверхности, — общая векторная краевая задача ($\hat{R} \neq 0$, $\mathbf{E} \neq 0$)

$$\hat{K}\Phi_R = 0, \quad \Phi_R \Big|_t = 0, \quad \Phi_R \Big|_b = \varepsilon \hat{R}\Phi_R + \varepsilon \mathbf{E}, \quad (4)$$

где источник $\mathbf{E}(s) \equiv \hat{R}\Phi_0$ — яркость (освещенность, облученность) подложки, создаваемая фоновым излучением, с учетом состояния поляризации.

2. Функции влияния векторной краевой задачи теории переноса

Рассмотрим первую векторную краевую задачу теории переноса

$$\hat{K}\Phi = 0, \quad \Phi \Big|_t = 0, \quad \Phi \Big|_b = \mathbf{f}(s^H; s). \quad (5)$$

Различные возможные состояния поляризации плоской поперечно-электрической волны в общем случае представляются вектором $\Phi(s^H; z, s)$, составленным из четырех действительных величин Φ_m , $m = 1, \dots, M$, $M = 4$, которые являются коэффициентами разложения вектора Φ по ортам \mathbf{i}_m некоторой системы координат:

$$\Phi = \mathbf{i}_1\Phi_1 + \mathbf{i}_2\Phi_2 + \mathbf{i}_3\Phi_3 + \mathbf{i}_4\Phi_4,$$

которая зависит от способа описания поляризованного излучения.

В общем случае, когда вектор Стокса источника \mathbf{f} содержит несовпадающие анизотропные горизонтально-неоднородные компоненты $f_n(s^H; s)$, решение задачи (5) можно представить в виде суммы

$$\Phi(r, s) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(r, s),$$

слагаемые которой являются решением набора задач

$$\hat{K}\Phi_n = 0, \quad \Phi_n \Big|_t = 0, \quad \Phi_n \Big|_b = \mathbf{t}_n f_n \quad (6)$$

с векторами

$$\mathbf{t}_n = \{\delta_{mn}\}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

По аналогии со скалярной задачей теории переноса, решение задачи (6) для фиксированного n получается в виде векторного линейного функционала:

$$\Phi_n = (\Theta_n, f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Theta_n(s^-; z, s) f_n(s^H; s^-) ds^-.$$

Векторные функции влияния $\Theta_n = \{\Theta_{mn}\}$, $n = 1, \dots, N$, компонентами которых являются параметры Стокса $\Theta_{mn}(s^-; z, s)$, $m = 1, \dots, M$, находятся как решение набора задач

$$\hat{K}\Theta_n = 0, \quad \Theta_n \Big|_t = 0, \quad \Theta_n \Big|_b = \mathbf{t}_n f_\delta,$$

$$f_\delta(s^-; s) = \delta(s - s^-),$$

с параметром $s^- \in \Omega^-$.

Компоненты параметров Стокса $\Phi_n = \{\Phi_{mn}(z, r_\perp, s)\}$ вычисляются как скалярные функционалы:

$$\Phi_{mn} = [\hat{\mathcal{P}}(\mathbf{f})]_{mn} \equiv (\Theta_{mn}, f_n) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Theta_{mn}(s^-; z, s) f_n(s^H; s^-) ds^-. \quad (7)$$

Введем тензор функций влияния, определенный N векторами Стокса Θ_n :

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1n} & \dots & \Theta_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{m1} & \dots & \Theta_{mn} & \dots & \Theta_{mN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{M1} & \dots & \Theta_{Mn} & \dots & \Theta_{MN} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Первый индекс $m = 1, \dots, M$, $M \leq 4$, компоненты Θ_{mn} тензора $\hat{\Pi}$ отвечает порядковому номеру параметра Стокса Θ_n , а второй индекс $n = 1, \dots, N$, $N \leq 4$, соответствует индексу вектора источника \mathbf{t}_n в наборе задач (6), описывающем модель расчета Θ_n , а, следовательно, компонент тензора $\hat{\Pi}$ (8).

Введем линейный векторный функционал

$$\Phi = \hat{\mathcal{P}}(\mathbf{f}) \equiv (\hat{\Pi}, \mathbf{f}) = \{\Phi_m\}, \quad m = 1, \dots, M, \quad M \leq 4. \quad (9)$$

Компоненты решения задачи (5), определяемые через скалярное произведение

$$\Phi_m = [\hat{\mathcal{P}}(\mathbf{f})]_m \equiv \sum_{n=1}^N (\Theta_{mn}, f_n),$$

являются линейной комбинацией линейных скалярных функционалов (7).

В случае анизотропного горизонтально-однородного источника $f_n(s^H; s)$ решение задачи (6) находится в форме линейного функционала

$$\Phi_n(s^H; z, s) = [\hat{\mathcal{P}}_z(\mathbf{f})]_n \equiv (\Theta_{zn}, f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Theta_{zn}(s'; z, s) f_n(s^H; s') ds'$$

с ядром — векторной функцией влияния $\Theta_{zn}(s^-; z, s)$, которая является решением одномерной задачи

$$\hat{K}_z \Theta_{zn} = 0, \quad \Theta_{zn} \Big|_t = 0, \quad \Theta_{zn} \Big|_b = \mathbf{t}_n \delta(s - s^-); \quad s^- \in \Omega^-. \quad (10)$$

При изотропном горизонтально-однородном источнике решение задачи (6)

$$\Phi_n(z, s) = [\hat{\mathcal{P}}_c(\mathbf{f})]_n \equiv f_n \mathbf{W}_n(z, s), \quad f_n = \text{const},$$

рассчитывается через векторную функцию влияния

$$\mathbf{W}_n(z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Theta_{zn}(s^-; z, s) ds^-, \quad (11)$$

которую называют также векторной функцией пропускания, отягощенной вкладом многократного рассеяния, и определяют как решение одномерной векторной задачи

$$\hat{K}_z \mathbf{W}_n = 0, \quad \mathbf{W}_n \Big|_t = 0, \quad \mathbf{W}_n \Big|_b = \mathbf{t}_n. \quad (12)$$

3. Векторный оптический передаточный оператор

Введем параметрический ряд регулярных возмущений

$$\Phi_R = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k,$$

члены которого удовлетворяют системе рекуррентных первых векторных краевых задач

$$k = 1 : \hat{K}\Phi_1 = 0, \quad \Phi_1 \Big|_t = 0, \quad \Phi_1 \Big|_b = \mathbf{E}; \quad (13)$$

$$k \geq 2 : \hat{K}\Phi_k = 0, \quad \Phi_k \Big|_t = 0, \quad \Phi_k \Big|_b = \hat{R}\Phi_{k-1}. \quad (14)$$

Вводим операцию, описывающую взаимодействие излучения с границей через тензор (8):

$$[\hat{G}\mathbf{f}](s^-; H, s) \equiv \hat{R}(\hat{\Pi}, \mathbf{f}) = \int_{\Omega^+} \hat{q}(s, s^+)(\hat{\Pi}, \mathbf{f}) ds^+.$$

Можно показать, что решения задач (13)–(14) представимы через тензор (8) в рекуррентной форме:

$$\Phi_1 = (\hat{\Pi}, \mathbf{E}); \quad \Phi_k = (\hat{\Pi}, \hat{R}\Phi_{k-1}) = (\hat{\Pi}, \hat{G}^{k-1}\mathbf{E})$$

и асимптотически точное решение задачи (4) выражается явно (полагаем $\varepsilon = 1$):

$$\Phi_R = (\hat{\Pi}, \mathbf{Y}); \quad \mathbf{Y} \equiv \hat{Y}\mathbf{E} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}^k \mathbf{E} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{R}\Phi_k \quad (15)$$

— сумма ряда Неймана по кратности отражения излучения от подложки — "сценарий" оптического изображения или яркость подстилающей поверхности.

Для "сценария" $\mathbf{Y}(x)$, $x = (s^-) \in X^-$, $X^- = \Omega^-$, получаем оценку

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\hat{R}\Phi_k\| \leq \|\hat{R}\Phi_0\| \sum_{k=0}^{\infty} (q_* c_0)^k = \frac{\|\mathbf{E}\|}{1 - q_* c_0} \leq \frac{q_* \|\Phi_0\|}{1 - q_* c_0},$$

где c_0 — сферическое альbedo Земли, т.е. ряд Неймана (15) сходится как геометрическая прогрессия.

Сходимость оценивается в векторном пространстве линейных непрерывных функционалов посредством следующих норм и соотношений:

$$\|\Phi_k\| = \max_m \text{vrai} \sup_{z,s} |\Phi_{mk}| \leq q_*^{k-1} c_0^k \|\mathbf{E}\|,$$

$$\|\hat{R}\Phi_k\| \leq \|\hat{R}(\vec{\mathbf{I}})\| \|\Phi_k\| \leq q_*^k c_0^k \|\mathbf{E}\|,$$

$$\|\hat{R}(\vec{\mathbf{I}})\| \leq \max_m \text{vrai} \sup_{s^-} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega^+} |q_{mn}(s^-, s^+)| ds^+ = q_* \leq 1,$$

$$\|\hat{\mathcal{P}}(\mathbf{f})\| \leq \|\hat{\mathcal{P}}(\vec{\mathbf{I}})\| \|\mathbf{f}\|, \quad \|\hat{\mathcal{P}}(\vec{\mathbf{I}})\| \leq \max_m \text{vrai} \sup_{z,s} |W_{m1}| = c_0 < 1.$$

Можно показать, что "сценарий" удовлетворяет векторному уравнению Фредгольма II-рода

$$\mathbf{Y} = \hat{R}(\hat{\Pi}, \mathbf{Y}) + \mathbf{E},$$

которое называют уравнением "приземной фотографии".

В соответствии с новой математической моделью (15), вместо расчета ряда по кратности отражения в полном фазовом объеме решения задачи (4), достаточно рассчитать конечный ряд Неймана только для "сценария" на границе с $z = H$ в фазовом объеме X^- , а затем искать угловые и пространственные распределения параметров Стокса — решения задачи (4) с помощью функционала (15). Функция влияния рассчитывается сеточно-характеристическим методом или методом Монте-Карло.

4. Многослойные гетерогенные системы

Предлагается оригинальный универсальный математический аппарат для моделирования переноса оптического излучения с учетом поляризации и многократного рассеяния и поглощения в многослойных

неоднородных гетерогенных природных и искусственных системах с существенно различными радиационными режимами в отдельных областях системы. Для таких задач не применимы широко распространенные методы сложения или удвоения слоев. Гетерогенной является система "свободная атмосфера - многоярусная слоистая облачность - приземный слой атмосферы - океан" или система "мезосфера - стратосфера - тропосферные многоярусные слоистые облака - шлейфы дымов или выбросов загрязнителей - земная поверхность".

Подход основан на построении обобщенных решений в форме матричных функционалов, ядрами которых являются векторы функций влияния отдельных слоев системы. В свою очередь, функции влияния рассчитываются по аналитическим формулам или численными методами (например, итерационным методом характеристик с процедурами учета сильной анизотропии рассеяния и ускорения сходимости итераций) как решения первых краевых задач для интегро-дифференциальных кинетических уравнений или их модификаций.

Для наглядности рассмотрим частные случаи двухслойной системы с граничными условиями, описывающими отражающую подстилающую поверхность или "абсолютно черное" дно.

Построим решение краевой задачи для двухслойной гетерогенной системы

$$\hat{K}_z \Phi = \mathbf{F}^{in}, \quad \Phi|_{t\downarrow} = \mathbf{F}_t^\downarrow, \quad \Phi|_{b\uparrow} = \hat{R}_b^\uparrow \Phi + \mathbf{F}_b^\uparrow$$

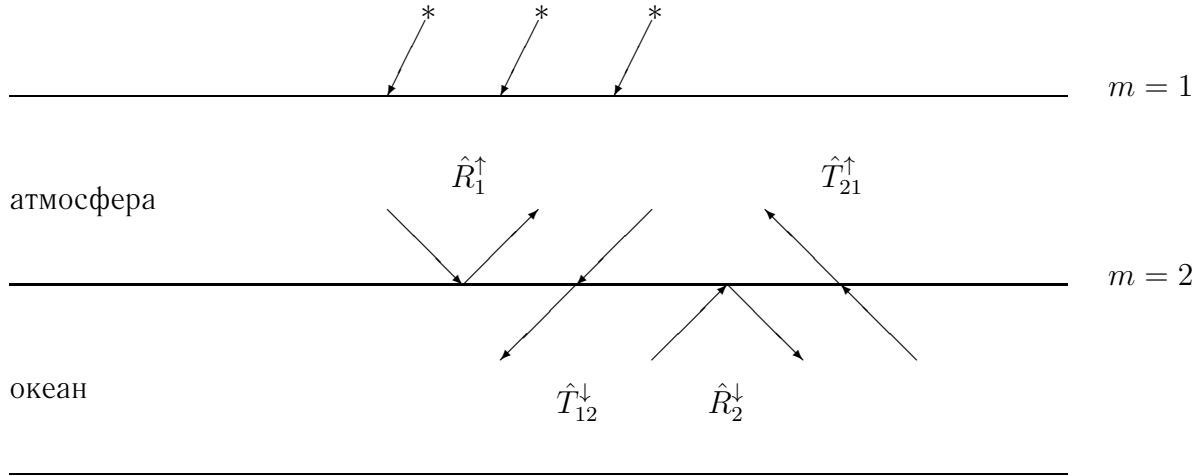
с краевыми условиями на внутренней границе раздела слоев с $m = 2$

$$\Phi|_{d\uparrow, m} = \varepsilon(\hat{R}_m^\uparrow \Phi + \hat{T}_m^\uparrow \Phi) + \mathbf{F}_{m-1}^\uparrow,$$

$$\Phi|_{d\downarrow, m} = \varepsilon(\hat{R}_m^\downarrow \Phi + \hat{T}_m^\downarrow \Phi) + \mathbf{F}_m^\downarrow,$$

$$\mathbf{F}_1^\downarrow = \mathbf{F}_t^\downarrow; \quad \mathbf{F}_M^\uparrow = \mathbf{F}_b^\uparrow; \quad d\downarrow, 1 = t\downarrow; \quad d\uparrow, M+1 = b\uparrow;$$

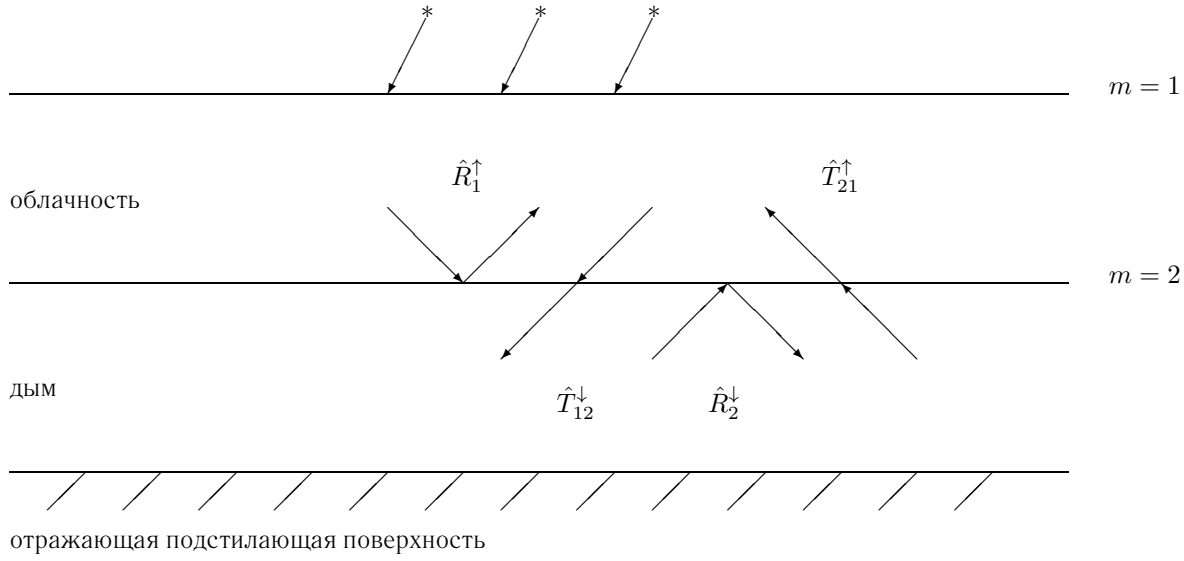
интегро-дифференциальный оператор $\hat{K}_z \equiv \hat{D}_z - \hat{S}$; $M = 2$, $m = 1 \div M$ — номер слоя.



нулевое граничное условие — абсолютно "черное" дно

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1^\uparrow & \hat{T}_{21}^\uparrow \\ \hat{T}_{12}^\downarrow & \hat{R}_2^\downarrow \end{bmatrix}; \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1^\uparrow \\ \Theta_2^\downarrow \end{bmatrix};$$

$$\hat{G}\mathbf{F} = \hat{P}(\Theta, \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \hat{R}_1^\uparrow(\Theta_1^\uparrow, \mathbf{F}_1^\uparrow) + \hat{T}_{21}^\uparrow(\Theta_2^\downarrow, \mathbf{F}_2^\downarrow) \\ \hat{T}_{12}^\downarrow(\Theta_1^\uparrow, \mathbf{F}_1^\uparrow) + \hat{R}_2^\downarrow(\Theta_2^\downarrow, \mathbf{F}_2^\downarrow) \end{bmatrix}.$$



$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1^{\uparrow} & \hat{T}_{21}^{\uparrow} & \hat{T}_{21}^{\uparrow} \\ \hat{T}_{12}^{\downarrow} & \hat{R}_2^{\downarrow} & \hat{R}_2^{\downarrow} \\ 0 & \hat{R}_b^{\uparrow} & \hat{R}_b^{\uparrow} \end{bmatrix}; \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1^{\uparrow} \\ \Theta_2^{\downarrow} \\ \Theta_2^{\uparrow} \end{bmatrix};$$

$$\hat{G}\mathbf{F} = \hat{P}(\Theta, \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \hat{R}_1^{\uparrow}(\Theta_1^{\uparrow}, \mathbf{F}_1^{\uparrow}) + \hat{T}_{21}^{\uparrow}(\Theta_2^{\downarrow}, \mathbf{F}_2^{\downarrow}) + \hat{T}_{21}^{\uparrow}(\Theta_2^{\uparrow}, \mathbf{F}_2^{\uparrow}) \\ \hat{T}_{12}^{\downarrow}(\Theta_1^{\uparrow}, \mathbf{F}_1^{\uparrow}) + \hat{R}_2^{\downarrow}(\Theta_2^{\downarrow}, \mathbf{F}_2^{\downarrow}) + \hat{R}_2^{\downarrow}(\Theta_2^{\uparrow}, \mathbf{F}_2^{\uparrow}) \\ \hat{R}_b^{\uparrow}(\Theta_2^{\downarrow}, \mathbf{F}_2^{\downarrow}) + \hat{R}_b^{\uparrow}(\Theta_2^{\uparrow}, \mathbf{F}_2^{\uparrow}) \end{bmatrix}.$$

Операторы отражения \hat{R}_m^{\uparrow} , \hat{R}_m^{\downarrow} и пропускания \hat{T}_m^{\uparrow} , \hat{T}_m^{\downarrow} определяются через компоненты матриц рассеяния сред по следующим правилам:

$$[\hat{R}_m^{\uparrow}(\gamma_{m-1}^{\uparrow})f_{m-1}^{\downarrow}](h_m, s_{m-1}^-) = \int_{\Omega^+} f_{m-1}^{\downarrow}(h_m, s_{m-1}^+) \gamma_{m-1}^{\uparrow}(h_m, s_{m-1}^+, s_{m-1}^-) ds_{m-1}^+;$$

$$[\hat{T}_m^{\downarrow}(\gamma_m^{\downarrow})f_{m-1}^{\downarrow}](h_m, s_m^+) = \int_{\Omega^+} f_{m-1}^{\downarrow}(h_m, s_{m-1}^+) \gamma_m^{\downarrow}(h_m, s_{m-1}^+, s_m^+) ds_{m-1}^+;$$

$$[\hat{T}_m^{\uparrow}(\gamma_{m-1}^{\uparrow})f_m^{\uparrow}](h_m, s_{m-1}^-) = \int_{\Omega^-} f_m^{\uparrow}(h_m, s_m^-) \gamma_{m-1}^{\uparrow}(h_m, s_m^-, s_{m-1}^-) ds_m^-;$$

$$[\hat{R}_m^{\downarrow}(\gamma_m^{\downarrow})f_m^{\uparrow}](h_m, s_m^+) = \int_{\Omega^-} f_m^{\uparrow}(h_m, s_m^-) \gamma_m^{\downarrow}(h_m, s_m^-, s_m^+) ds_m^-.$$

Решение ищем в виде ряда регулярных возмущений

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Phi^{(n)}$$

Вводим алгебраические векторы с размерностью $2M$:

$$n\text{-приближение решения: } \Phi^{(n)} = \{\Phi_1^{\downarrow(n)}, \Phi_1^{\uparrow(n)}, \Phi_2^{\downarrow(n)}, \Phi_2^{\uparrow(n)}\};$$

полное решение: $\Phi = \{\Phi_1^\downarrow, \Phi_1^\uparrow, \Phi_2^\downarrow, \Phi_2^\uparrow\}$;
 источники в n -приближении: $\mathbf{F}^{(n)} = \{F_1^{\downarrow(n)}, F_1^{\uparrow(n)}, F_2^{\downarrow(n)}, F_2^{\uparrow(n)}\}$;
 функции влияния слоев: $\Theta = \{\Theta_1^\downarrow, \Theta_1^\uparrow, \Theta_2^\downarrow, \Theta_2^\uparrow\}$;
 начальное приближение источников: $\mathbf{E} = \{E_1^\downarrow, E_1^\uparrow, E_2^\downarrow, E_2^\uparrow\}$;
 "сценарий" на границах: $\mathbf{Z} = \{Z_1^\downarrow, Z_1^\uparrow, Z_2^\downarrow, Z_2^\uparrow\}$;

Осуществляем расщепление исходной задачи на $2M$ задач со своими граничными условиями.

Нулевое приближение — излучение от источников без обмена излучением между слоями: $m = 1 \operatorname{div} M$

$$\begin{aligned}\hat{K}_z \Phi_m^{\downarrow(0)} &= \mathbf{F}_m^{\downarrow in}, \quad \Phi_m^{\downarrow(0)}|_{d\downarrow, m} = \mathbf{F}_m^\downarrow, \quad \Phi_m^{\downarrow(0)}|_{d\uparrow, m+1} = 0; \\ \hat{K}_z \Phi_m^{\uparrow(0)} &= \mathbf{F}_m^{\uparrow in}, \quad \Phi_m^{\uparrow(0)}|_{d\downarrow, m} = 0, \quad \Phi_m^{\uparrow(0)}|_{d\uparrow, m+1} = \mathbf{F}_m^\uparrow.\end{aligned}$$

Приближения $n \geq 1$ — система $2M$ уравнений для $m = 1 \operatorname{div} M$

$$\begin{aligned}\hat{K}_z \Phi_m^{\downarrow(n)} &= 0, \quad \Phi_m^{\downarrow(n)}|_{d\downarrow, m} = \mathbf{F}_m^{\downarrow(n-1)}, \quad \Phi_m^{\downarrow(n)}|_{d\uparrow, m+1} = 0; \\ \hat{K}_z \Phi_m^{\uparrow(n)} &= 0, \quad \Phi_m^{\uparrow(n)}|_{d\downarrow, m} = 0, \quad \Phi_m^{\uparrow(n)}|_{d\uparrow, m+1} = \mathbf{F}_m^{\uparrow(n-1)}\end{aligned}$$

с источниками

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1^{\downarrow(n)} &= 0; \quad \mathbf{F}_M^{\uparrow(n)} = \hat{R}_b^\uparrow \Phi_M^{\downarrow(n)} + \hat{R}_b^\uparrow \Phi_M^{\uparrow(n)}; \\ \mathbf{F}_m^{\downarrow(n)} &= \hat{T}_m^\downarrow \Phi_{m-1}^{\downarrow(n)} + \hat{T}_m^\downarrow \Phi_{m-1}^{\uparrow(n)} + \hat{R}_m^\downarrow \Phi_m^{\downarrow(n)} + \hat{R}_m^\downarrow \Phi_m^{\uparrow(n)}; \\ \mathbf{F}_m^{\uparrow(n)} &= \hat{R}_{m+1}^\uparrow \Phi_m^{\downarrow(n)} + \hat{R}_{m+1}^\uparrow \Phi_m^{\uparrow(n)} + \hat{T}_{m+1}^\uparrow \Phi_{m+1}^{\downarrow(n)} + \hat{T}_{m+1}^\uparrow \Phi_{m+1}^{\uparrow(n)}.\end{aligned}$$

Решения находим в виде линейных функционалов для каждого из слоев с $m = 1 \operatorname{div} M$

$$\Phi_m^{\downarrow(n)} = \left(\Theta_m^\downarrow, \mathbf{F}_m^{\downarrow(n-1)} \right); \quad \Phi_m^{\uparrow(n)} = \left(\Theta_m^\uparrow, \mathbf{F}_m^{\uparrow(n-1)} \right).$$

Ядра функционалов — векторные функции влияния слоев $m = 1 \operatorname{div} M$ определяются из краевых задач

$$\begin{aligned}\hat{K}_z \Theta_m^\downarrow &= 0, \quad \Theta_m^\downarrow|_{d\downarrow, m} = \mathbf{f}_{\delta, m}^\downarrow, \quad \Theta_m^\downarrow|_{d\uparrow, m+1} = 0; \\ \hat{K}_z \Theta_m^\uparrow &= 0, \quad \Theta_m^\uparrow|_{d\downarrow, m} = 0, \quad \Theta_m^\uparrow|_{d\uparrow, m+1} = \mathbf{f}_{\delta, m}^\uparrow.\end{aligned}$$

В векторной форме n -приближение решения можно записать в виде

$$\Phi^{(n)} = \left(\Theta, \mathbf{F}^{(n-1)} \right), \quad \mathbf{F}^{(n-1)} = \hat{P} \Phi^{(n-1)}.$$

Два последовательных n -приближения связаны рекуррентным соотношением

$$\Phi^{(n)} = \left(\Theta, \hat{P} \Phi^{(n-1)} \right) = \left(\Theta, \hat{G}^{n-1} \mathbf{E} \right),$$

где \mathbf{E} — начальное приближение. Асимптотически точное решение получается в форме векторного линейного функционала — передаточного оператора:

$$\Phi = (\Theta, \mathbf{Z}).$$

"Сценарий" — вектор \mathbf{Z} распределений яркостей на границах

$$\mathbf{Z} \equiv \hat{Z} \mathbf{E} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}^n \mathbf{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P} \Phi^{(n)}$$

— есть сумма ряда Неймана по кратности прохождения излучения через границы с учетом вклада многократного рассеяния с помощью функций влияния каждого слоя.

В целом решение исходной задачи для гетерогенной системы сведено к трем этапам.

Этап 1. Расчет вектора функций влияния с параметрической зависимостью от направлений и для отдельных слоев как решение задач с внешним мононаправленным потоком (аналог обычных задач для слоя, освещаемого солнечным потоком).

Этап 2. Расчет вектора "сценариев" на внутренних и внешних границах системы с помощью матричных операций.

Этап 3. Расчет угловых и пространственных распределений излучения внутри системы или на её границах через векторный линейный функционал, содержащий вектор "сценариев" на границах и ядром которого является тензор функций влияния.

Представленный метод уникален тем, что можно объединять в одну систему перенос излучения в отдельных областях системы с оптически изотропными и анизотропными средами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сушкевич Т.А.** Математические модели переноса излучения. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 661 с.
2. **Fomin B.A., Falaleeva V.A.** Polarized Atmospheric Radiative Transfer Model for Calculations of Spectra of the Stokes Parameters of Shortwave Radiation Based on the Line-by-Line and Monte Carlo Methods // Atmosphere. — 2012. — № 3(4). — P. 451–467

REFERENCES

1. **Sushkevich T.A.** Mathematical models of radiation transfer [Matematicheskie modeli perenosa izlucheniya]. — Moscow: BINOM. Laboratorija znanii, 2005. — 661 p. (in Russian)
2. **Fomin B.A., Falaleeva V.A.** Polarized Atmospheric Radiative Transfer Model for Calculations of Spectra of the Stokes Parameters of Shortwave Radiation Based on the Line-by-Line and Monte Carlo Methods // Atmosphere. — 2012. — № 3(4). — P. 451–467